ECOLES AGRONOMIQUES 1980
— 206 —

MATIÈRES A OPTION

(Option générale)

Mathématiques, Sciences physiques, Biologie

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

I

Soit f une fonction numérique, définie sur tout $\mathbb{R}$ impaire et admettant une dérivée troisième continue sur tout $\mathbb{R}$.

1° Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 sur l'intervalle $[0, x]$.

2° Montrer d'autre part que l'on peut associer à f au moins une fonction θ telle que

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x) = x f'[x.\theta(x)] \\ \theta(x) \in]0, 1[\end{cases}$$

3° On suppose en outre $f'''(0) \neq 0$. Déterminer, pour une telle fonction θ, la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers zéro.

Tournez la page S. V. P.

II

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \text{Arc tg } x$$

1° Établir l'unicité de la fonction θ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \neq 0, & \text{les relations (1) sont vérifiées} \\ \theta(0) = \lim\limits_{x \to 0} \theta(x) \end{cases}$$

Pour cela on explicitera la fonction $x \longmapsto \theta(x)$.

Montrer, en considérant la formule obtenue, que θ est paire.

2° Soit n un entier naturel. Démontrer que la fonction θ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n. Écrire ce développement pour $n = 5$. Retrouver la limite de θ quand x tend vers zéro.

3° Calculer la dérivée $\theta'(x)$. Montrer que cette dérivée a, pour x positif, le signe de :

$$u(x) = 2(\text{Arc tg } x)^2 - x \text{ Arc tg } x - \frac{x^2}{1 + x^2}$$

4° Étudier les variations de $u(x)$.

(Pour étudier le signe de $u'(x)$ il pourra être commode d'introduire une fonction auxiliaire dont la dérivée est rationnelle.)

5° Étudier les variations de θ et construire sa courbe représentative.

6° Montrer qu'il existe sur la courbe (C) représentant la fonction $f : x \longmapsto \text{Arc tg } x$ un point M d'abscisse positive x et un seul tel que la tangente à (C) au point M' d'abscisse $\frac{x}{2}$ soit parallèle à OM.

III

On définit une fonction φ par :

$$\varphi(x) = \frac{4 \text{ tg } x}{4 + \text{tg}^2 x}$$

1° Étudier les variations de φ et construire sa courbe représentative.

2° Établir que, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation :

$$\varphi(x) = x \quad \text{a une solution unique } \alpha.$$

3° On définit une suite réelle par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \varphi(u_{n-1}) \end{cases}$$

Démontrer que cette suite est convergente et a pour limite α.

4° Indiquer comment les résultats précédents permettent d'établir (par une méthode différente de celle employée dans la deuxième partie) l'existence et l'unicité d'un réel positif x vérifiant l'équation :

$$\text{Arc tg } x = \frac{x}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

907

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail